UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

S E G U N D O E X A M E N P A R C I A L : TIPO A
[duración : una hora y 45 minutos]

S O L U C I O N E S

SE1. (10 ptos.) Sea α el plano que pasa por los puntos A(3, 1, -3), B(0, 2, -3) , C(3, 2, 0) y sea β el plano de ecuación $2x-3y+4z+3 = 0$.
1a) Determine(y justifique) si los planos α, β son o no son paralelos ;
1b) en el caso de no ser paralelos halle ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los dos planos;
1c) halle el área del triángulo de vértices A, B, C.

AB = (-3, 1, 0) , **AC** = (0, 1, 3) ;

El vector **AB**x**AC** = $\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ = (3, 9, -3) = 3(1, 3,-1) es perpendicular al plano α y su módulo es igual al doble del área del triángulo de vértices A, B, C ;

S1a. Como el ángulo de dos planos es igual al ángulo de sus vectores normales, que en nuestro caso son $\mathbf{n}_\alpha = (1, 3,-1)$, $\mathbf{n}_\beta = (2,-3, 4)$ y como dos vectores son paralelos si y sólo si uno de ellos es múltiplo del otro, queda claro que los dos planos α, β <u>no</u> son paralelos.

S1b. una ecuación del plano α es $\mathbf{n}_\alpha.\mathbf{AP} = (1, 3,-1)(x-x_A , y-y_A , z-z_A) = 0$, por lo cual obtenemos la ecuación $(x-3)+3(y-1)-(z+3) = x+3y-z - 9 = 0$;
a partir del sistema de las ecuaciones de los dos planos α, β , obtenemos :

$$\left\{\begin{array}{l} x+3y-z-9 = 0 \\ 2x -3y+4z+3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 9 \\ 2 & -3 & 4 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow ...\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{array}\right] \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2-t \\ y = \frac{7}{3} + \frac{2}{3}t \\ z = t \end{array}\right.$$

S1c. como ya se observó, el módulo del vector **AB**x**AC** = 3(1, 3,-1) es igual

al doble del área del triángulo de vértices A, B, C, de manera que el área es igual a :

$$\frac{3}{2}\sqrt{1+9+1} = \frac{3\sqrt{11}}{2} .$$

SE2.- (5 ptos.) En el espacio vectorial, $\mathbf{P_2}$, exprese el polinomio $t^2+4t -3$ como combinación lineal de los tres polinomios $p_1= t^2 - 2t+5$, $p_2= 2t^2 -3t$, $p_3= t+3$.
El polinomio $t^2+4t -3$ es una combinación lineal de los tres polinomios $p_1= t^2 - 2t+5$, $p_2= 2t^2 -3t$, $p_3= t+3$ si y sólo si existen tres números, x_1, x_2, x_3, tales que :

$x_1(t^2 - 2t+5)+x_2(2t^2 -3t)+ x_3(t+3) = t^2+4t -3$, $\Leftrightarrow$
$(x_1+2x_2)t^2+(-2x_1-3x_2+x_3)t + (5x_1+3x_3) = t^2+4t -3 \Leftrightarrow$

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

S E G U N D O   E X A M E N   P A R C I A L : TIPO A
[duración : una hora y 45 minutos]

S O L U C I O N E S

$$\begin{cases} x_1+2x_2=1 \\ -2x_1-3x_2+x_3=4 \\ 5x_1+3x_3=-3 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow \ldots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

por lo tanto hallamos que el polinomio t^2+4t-3 se puede expresar (en una sola manera) con la siguiente combinación lineal :

$$t^2+4t-3 = -3(t^2-2t+5)+2(2t^2-3t)+4(t+3) .$$

SE3.(4 ptos.) En el espacio vectorial, V, de todas las matrices de tamaño nxn , averigüe para cada uno de los subconjuntos que se definen a continuación, si es o no es subespacio de V :
3a. $W_1 = \{ H=[a_{ij}] \in V \mid a_{ij}=a_{ji} \}$ = subconjunto de todas las matrices simétricas ;
3b. $W_2 = \{ H \in V \mid HA=AH \}$ = subconjunto de todas las matrices que conmutan con una matriz, A, asignada .

S3a. W_1 es subespacio, ya que (por ejemplo) la matriz nula es simétrica [por lo cual $W_1 \neq \emptyset$] y además :
$A=[a_{ij}] \in W_1$, $B=[b_{ij}] \in W_1 \Rightarrow a_{ij}=a_{ji}$, $b_{ij}=b_{ji} \Rightarrow$
para la matriz suma $C=A+B=[c_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]$ se cumple : $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}=a_{ji}+b_{ji}=c_{ji}$
[cierre de W_1 respecto a la suma de vectores] y tambien :
$A=[a_{ij}] \in W_1$, $\lambda \in R \Rightarrow$ para la matriz $D=\lambda A=[\lambda a_{ij}]$ se cumple $d_{ij}=\lambda a_{ij}=\lambda a_{ji}=d_{ji}$
[cierre de W_1 respecto a la smultiplicación de vectores por números] .
S3b. W_2 es subespacio. En efecto la matriz nula permuta con A y además :
$HA=AH$, $BA=AB \Rightarrow$
[usando la propiedad distributiva del producto de matrices respecto a la suma]
$(H+B)A=HA+BA=AH+AB=A(H+B)$ [cierre de W_2 respecto a la suma de vectores] ;
$HA=AH$, $\lambda \in R \Rightarrow (\lambda H)A=\lambda(HA)=\lambda(AH)=A(\lambda H)$ [cierre de W_1 respecto a la multiplicación de vectores por números] .

SE4. (6 ptos) Halle las condiciones sobre a, b, c para que el vector $(a, b, c) \in R^3$ pertenezca al subespacio generado por **u**=(2, 1, 0), **v**=(1, -1, 2), **w**=(0, 3, -4) .
Observemos que el vector (a, b, c) pertenece al subespacio generado por
u=(2, 1, 0), **v**=(1, -1, 2), **w**=(0, 3, -4), si y sólo si existen tres números x_1, x_2, x_3, tales que :

$$x_1(2, 1, 0)+x_2(1, -1, 2)+x_3(0, 3, -4) = (a, b, c) \; ; \qquad \begin{cases} 2x_1+x_2 = a \\ x_1-x_2+3x_3=b \\ 2x_2-4x_3=c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 3 & b \\ 0 & 2 & -4 & c \end{array}\right] \Rightarrow \ldots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & b \\ 0 & 1 & -2 & c/2 \\ 0 & 0 & 0 & -4b+2a-3c \end{array}\right] \Rightarrow \quad 2a-4b-3c = 0.$$